Une Structure Uniforme sur un Espace F(E,F)

Nicolas Bouleau

UNE STRUCTURE UNIFORME SUR UN ESPACE $\mathcal{F}(E, F)$

Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle
Vol XI, 2, (1969) p207-214

Nicolas BOULEAU

Soient E un espace topologique, et F un espace uniforme. L'objet de cette étude est d'introduire une topologie sur $\mathcal{F}(E, F)$, ensemble des applications de E dans F, telle que toute limite d'une suite de fonctions continues soit continue et que, si une suite de fonctions continues converge en chaque point vers une fonction continue, elle converge vers cette fonction pour cette topologie.

Plus précisément, nous définirons sur $\mathcal{F}(E, F)$ une structure uniforme possédant les propriétés suivantes :

1) $\mathcal{C}(E, F)$ est fermé dans $\mathcal{F}(E, F)$ muni de cette structure uniforme.

2) La restriction de cette structure uniforme à $\mathcal{C}(E, F)$ est équivalente à la structure uniforme de la convergence simple. Nous étudions ensuite plusieurs applications de cette topologie.

1 Structure uniforme de la V-convergence

Soit E un espace topologique et soit F un espace uniforme. Soit W un entourage de F, A une partie finie de E et soit $\mathcal{U}_{W,A}$ l'ensemble des couples $(f, g) \in \mathcal{F}(E, F) \times \mathcal{F}(E, F)$ tels qu'il existe des voisinages $V_{a_1}, \ldots, V_{a_n}$ des points de A tels que l'on ait :

$$\forall x \in \cup_{i=1}^{n} V_{a_i} \qquad (f(x), g(x)) \in W.$$

Proposition 1 *Lorsque W décrit un système fondamental d'entourages de F et lorsque A décrit l'ensemble des parties finies de E, les $\mathcal{U}_{W,A}$ décrivent un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme sur $\mathcal{F}(E, F)$, appelée structure uniforme de la V-convergence.*

DEMONSTRATION. il suffit de vérifier que les axiomes des systèmes fondamentaux d'entourages sont vérifiés (cf. [1] Chap. 2 Structures Uniformes). Or :

$$W_3 \subset W_1 \cap W_2 \Rightarrow \mathcal{U}_{W_3, A_1 \cup A_2} \subset \mathcal{U}_{W_1, A_1} \cap \mathcal{U}_{W_2, A_2},$$

$$W' \subset \overset{-1}{W} \Rightarrow \mathcal{U}_{W', A} \subset \overset{-1}{\mathcal{U}}_{W,A}$$

$$\overset{2}{W}_1 \subset W \Rightarrow \overset{2}{\mathcal{U}}_{W_1, A} \subset \mathcal{U}_{W,A},$$

et, comme chaque $\mathcal{U}_{W,A}$ contient la diagonale de $\mathcal{F}(E, F)$, la proposition est démontrée.

$\mathcal{F}(E, F)$ muni de cette structure sera noté $\mathcal{F}_V(E, F)$.

Proposition 2 *La structure uniforme de la V-conuergence est plus fine que celle de la convergence simple et moins fine que celle de la conuergence uniforme locale.*

Ces propriétés se voient immédiatement en comparant les filtres d'entourages de ces différentes structures uniformes.

Proposition 3 *L'ensemble $\mathcal{C}(E,F)$ est fermé dans $\mathcal{F}(E,F)$. Les structures uniformes induites sur $\mathcal{C}(E,F)$ par les structures uniformes de la convergence simple et de la V-convergence sont équivalentes.*

DEMONSTRATION.

a) Soit $g \in \overline{\mathcal{C}(E,F)}^V$ adhérence de $\mathcal{C}(E,F)$ dans $\mathcal{F}_V(E,F)$, soit $x_0 \in E$, montrons que g est continue en x_0 :

Soient W et W' des entourages de F tels que $\overset{3}{W'} \subset W$. Il existe $f \in \mathcal{C}(E,F)$ telle que $(f.g) \in \mathcal{U}_{W',x_0}$, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage $V^1_{x_0}$ de x_0 tel que :

$$\forall x \in V^1_{x_0}, \qquad (f(x), g(x)) \in W'.$$

D'autre part f étant continue, il existe un voisinage $V^2_{x_0}$ de x_0 tel que :

$$\forall x \in V^2_{x_0}, \qquad (f(x), f(x_0)) \in W',$$

donc

$$\forall x \in V^1_{x_0} \cap V^2_{x_0}, \qquad (g(x), g(x_0)) \in \overset{3}{W'} \subset W.$$

donc g est continue en x_0.

b) Il suffit de montrer que sur $\mathcal{C}(E,F)$ la structure uniforme de la V-convergence est moins fine que celle de la convergence, simple : i.e. pour tout $\mathcal{U}_{W,A}$ entourage de $\mathcal{C}_V(E,F)$ il existe un entourage $\mathcal{W}$ de $\mathcal{C}_s(E,F)$ tel que $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}_{W,A}$. Soit donc

$$\mathcal{U}_{W,A} = \{(f,g) : \exists V_{a_1}, \ldots, V_{a_n} : \forall x \in \cup_{i=1}^n V_{a_i}, (f(x), g(x)) \in \mathcal{W}\}$$

et soit W' un entourage de F tel que $\overset{3}{W'} \subset W$. Considérons l'entourage de $\mathcal{C}_s(E,F)$ défini par

$$\mathcal{W}_{W',A} = \{(f,g) : \forall a_i \in A, (f(a_i), g(a_i)) \in W'\}.$$

Le fait que f et g soient continues implique que $\mathcal{W}_{W',A} \subset \mathcal{U}_{W,A}$.

REMARQUES

1) Si la structure uniforme de F est définie par les serni-distances d_i, $i \in I$, la structure uniforme de la Vconvergence peut se définir par les semi-distances :

$$\delta_{i,A}(f,g) = \inf_{V_k \in \mathcal{V}_{a_k}} \sup_{x \in \cup_k V_k} d_i(f(x), g(x))$$

où $\mathcal{V}_{a_k}$ désigne l'ensemble des voisinages de a_k dans E et A l'ensemble fini $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

2) Si un filtre $\mathfrak{F}$ converge dans $\mathcal{F}_V(E.F)$: $f = \lim_{\mathfrak{F}} f_i$ alors pour tout x dans E et tout entourage W de F, il existe un $V \in \mathcal{V}_x$ (ensemble des voisinages de x) et une fonction $f_i \in \mathfrak{F}$ tels que f et f_i soient voisins d'ordre W dans V.

Proposition 4 *Soient E un espace topologique et F un espace uniforme séparé, soit $H \subset \mathcal{C}(E.F)$ pour que H soit relativement compact pour la V-convergence, il faut et il suffit que :*

1) $\forall x$ $H(x)$ soit relativement compact dans F et

2) $\overline{H}^s \subset \mathcal{C}(E.F)$, $\overline{H}^s$ désignant la fermeture de H pour la topologie de la convergence simple.

DEMONSTRATION.

D'après la proposition 3, ces conditions sont suffisantes. Montrons qu'elles sont ncessaires :

Supposons donc H relativement compact pour la V-convergence, $\forall x \in E$ l'application $f \mapsto f(x)$ de $\mathcal{F}_V(E.F)$ dans F est continue, puisque la V-convergence est plus fine que la convergence simple, donc $H(x)$ est relativement compact dans F.

Pour la même raison $\overline{H}^V \subset \overline{H}^s$ et, puisque l'injection canonique de $\mathcal{F}_V(E,F)$ dans $\mathcal{F}_s(E,F)$ est continue, $\overline{H}^V$ est compact dans $\mathcal{F}_s(E,F)$, donc fermé. Comme $\overline{H}^V$ contient H, nécessairement $\overline{H}^V$ contient $\overline{H}^s$, donc $\overline{H}^V = \overline{H}^s$. D'après la proposition 3, on a donc : $\overline{H}^s \subset \mathcal{C}(E,F)$.

2 Critère de V-convergence

Même si F est complet, $\mathcal{F}_V(E,F)$ n'est pas nécessairement complet ; toutefois il existe un critère de convergence qui, comme celui de Cauchy, ne fait pas intervenir la limite du filtre étudié :

Proposition 5 *Soit E un espace topologique et soit F un espace uniforme complet défini par les semi-distances d_i, $i \in I$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un filtre $\mathfrak{F}$ sur $\mathcal{F}_V(E,F)$ soit convergent est que :*

$$\forall i \in I, \forall \varepsilon > 0, \forall a \in E,$$

$$\exists A \in \mathfrak{F} : \forall f \in A, \exists V_a : \forall x \in V_a, \exists B \in \mathfrak{F} : \forall g \in B$$
$$d_i(f(x), g(x)) \leq \varepsilon.$$

DEMONSTRATION

Condition nécessaire. Si $\mathfrak{F}$ V-converge vers ℓ, on a :

$$\forall i \in I, \forall \varepsilon > 0, \forall a \in E,$$

$$\exists A \in \mathfrak{F} : \forall f \in A, \exists V_a : \forall x \in V_a : d_i(f(x), \ell(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit x fixé, le filtre $\mathfrak{F}(x)$ converge vers $\ell(x)$ dans F, donc $\exists B : \forall g \in B, d_i(g(x), \ell(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, d'où le résultat.

Condition suffisante. On remarque d'abord qu'elle implique que le filtre $\mathfrak{F}(x)$ est un filtre de Cauchy dans F, soit $\ell(x)$ sa limite, alors on voit qu'elle implique que le filtre

$\mathfrak{F}$ V-converge vers ℓ.

REMARQUE. Si F est seulement séquentiellement complet, on a un critère analogue pour les suites. Par exemple, si Y est un espace vectoriel normé séquentiellement complet, une suite $\{f_n\}$ converge dans $\mathcal{F}_V(E,F)$ si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall a \in X, \exists N : \forall n \geq N, \exists V_a^n : \forall x \in V_a^n, \exists P : \forall p \geq P : \|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \epsilon.$$

On déduit de ce critère les applications suivantes :

Proposition 6 *Soient X un espace topologique, Y un espace de Banach. Soit $\{f_n\}$ une suite d'applications continues de X dans Y. On suppose que la série $\sum_n \|f_n\|$ converge en chaque point x vers une fonction $\Sigma(x)$ continue. Alors la série $\sum_n f_n(x)$ converge vers $S(x)$ continue.*

DEMONSTRATION. Comme $\| \sum_{k=p}^{k=q} f_k(x)\| \leq \sum_{k=p}^{k=q} \|f_k(x)\|$, le fait que la srie $\sum \|f_n(x)\|$ V-converge entraîne, d'après le critère ci-dessus, que la série $\sum_n f_n(x)$ V-converge.

Proposition 7 *Soit $\{f_n\}$ une suite d'applications continues de X dans un espace de Banach Y vérifiant $\| \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\| \leq A(x)$, $A(x)$ étant localement bornée. Soient $\{\varepsilon_n(x)\}$ continues de X dans $\mathbb{R}$ tendant vers zéro pour $n \to \infty$, et telles que la série $\sum_n |\varepsilon_n(x) - \varepsilon_{n-1}(x)|$ converge uers une fonction continue. Alors la série $\sum_n f_n(x)\varepsilon(x)$ converge vers une fonction continue de X dans Y.*

Cette proposition se démontre comme on démontre habituellement la règle d'Abel pour les séries en utilisant le critère ci-dessus au lieu du critère de Cauchy.

3 Sous-ensembles fermés pour la V-convergence et propriétés uniformes semi-locales

Soient toujours E un espace topologique et F un espace uniforme ; on dira qu'une propriété P ($P \subset \mathcal{F}(E,F)$) est uniforme semi-locale si, et seulement si, pour tout $f \in \mathcal{F}(E,F)$ la condition :

$\forall x \in E, \forall W$ entourage de $F, \exists g \in P$ et $\exists V \in \mathcal{V}_x$ avec f et g voisines d'ordre W sur V

implique $f \in P$.

Proposition 8 *Pour que $P \subset \mathcal{F}(E.F))$ soit une propriété uniforme semi-locale, il faut et il suffit que P soit fermé pour la V-convergence.*

La condition ci-dessus est en effet équivalente à la suivante :

$\forall A \subset E, A$ fini $, \forall W$ entourage de $F, \exists g \in P$ et $\exists V_n \in \mathcal{V}_{a_n}$ avec f et g d'ordre W sur $\cup_n V_n$

qui peut elle-même s'énoncer :

$$\forall \mathcal{W}_{W,A} \text{ entourage de } \mathcal{F}_V(E,F), \exists g \in P \text{ tel que } f \text{ et } g \text{ soient d'ordre } \mathcal{W}_{W,A}$$

c'est-à-dire $f \in \overline{P}$ d'où la proposition.

Dans la suite nous allons rechercher quelques propriétés uniformes semi-locales. Exemples : continuité, si $F = \mathbb{R}$ semi-continuité inférieure ou supérieure. De même on montre facilement le résultat suivant :

Proposition 9 *Soient X un espace topologique et Y un espace uniforme métrisable, soit $a_n \in X$ avec $\lim a_n = a$. Soit $H_{\{a_n\}}$ l'ensemble des fonctions de X dans Y telles que $\lim_n f(a_n)$ existe. Alors :*

a) $H_{\{a_n\}}$ est fermé dans $\mathcal{F}_V(X.Y)$;

b) si une suite de fonctions $f_p \in H_{\{a_n\}}$ V-converge vers g on a :

$$\lim_p(\lim_n f_p(a_n)) = \lim_n g(a_n).$$

En particulier l'ensemble des fonctions réglées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est fermé pour la V-convergence.

Proposition 10 *Soit X un espace topologique et soit Y un e.v.t. Le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}_{lb}(X,Y)$ de $\mathcal{F}(X,Y)$ des fonctions localement bornées est fermé dans $\mathcal{F}_V(X,Y)$. La structure de la V-convergence est compatible avec la structure d'espace vectoriel de ce sous-espace et est localement convexe si Y l'est.*

DEMONSTRATION

a) Etre localement borné est une propriété uniforme semi-locale donc $\mathcal{F}_{lb}(X,Y)$ est fermé.

b) Soit W un voisinage de 0 dans Y ; les ensembles

$$\mathcal{W}_{W,A} = \{f : \exists V_n \in \mathcal{V}_{a_n} : \forall y \in \cup_n V_n, f(y) \in W\}$$

forment, lorsque W décrit l'ensemble des voisinages équilibrés de 0 dans Y, un système invariant par homothétie et formé de voisinages équilibrés.

Comme on voit facilement que la V-convergence est compatible avec la structure de groupe additif de $\mathcal{F}_{lb}(X,Y)$ et comme les $f \in \mathcal{F}_{lb}(X,Y)$ sont localement bornées et donc les $\mathcal{W}_{W,A} \cap \mathcal{F}_{lb}(X,Y)$ absorbants, la structure de la V-convergence est compatible avec la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{F}_{lb}(X,Y)$. La dernière assertion résulte de ce que, si W est convexe, $\mathcal{W}_{W,A}$ l'est également.

Proposition 11 *Soit X localement compact et soit μ une mesure de Radon positive sur X. L'ensemble des fonctions μ-mesurables et l'ensemble des fonctions localement μ-intégrable sont fermés pour la V-convergence.*

DEMONSTRATION

Cela revient à montrer que les propriétés d'être μ-mesurable et d'être localement μ-intégrable sont des propriétés uniformes semi-Iocales. Soit donc $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_x \text{ et } \exists f_{\varepsilon,V} \text{ telle que } |f - f_{\varepsilon,V}| \leq \varepsilon \text{ dans } V,$$

$$f_{\varepsilon,V} \text{ étant } \mu - \text{mesurable (resp. localement } \mu\text{-intégrable).}$$

Soit K un compact de X. Il existe un nombre fini de V soient $V_1, \ldots, V_n$ recouvrant K. La fonction g_ε définie par

$$g_\varepsilon = f_{\varepsilon,V_k} \text{ sur } V_k \backslash (\cup_{i=1}^{k-1} V_i)$$

est μ-mesurable (resp. localement μ-intégrable) si on choisit les V_k ouverts, et l'on a $|g_\varepsilon - f| \leq \varepsilon$ dans K. Donc f est μ-mesurable (resp. localement μ-intégrable).

Si Y est métrisable, $\mathcal{F}_V(X, Y)$ n'est pas nécessairement métrisable ; toutefois on a :

Proposition 12 *Soit X un espace localement compact dénombrable à l'infini et soit Y un espace uniforme métrisable. Soit $A \subset \mathcal{F}_V(X, Y)$; si $f_0 \in \overline{A}$, il existe un sous-ensemble dénombrable A_1 de A tel que $f_0 \in \overline{A_1}$.*

DEMONSTRATION

Soit d une distance sur Y définissant la structure de Y. Soit K un compact de X ; on voit en utilisant la compacité de l'espace K^m que, pour tout couple d'entiers m, n , il existe une partie finie $A_{m,n}$ de A telle que, pour tout ensemble de m points t_k de K, il existe $f \in A_{m,n}$ et des voisinages $V_k \in \mathcal{V}_{t_k}$ tels que $d(f_0, f) \leq \frac{1}{n}$ sur $\cup_{k=1}^{m} V_k$. D'où on déduit la propriété, puisque X est réunion dénombrable de compacts.

Proposition 13 *Soient X, Y deux espaces métrisables, X étant localement compact dénombrable à l'infini. Alors*

a) l'ensemble des fonctions boréliennes est fermé dans $\mathcal{F}_V(X, Y)$.

b) Pour tout ordinal dénombrable α, l'ensemble des fonctions boréliennes de classe α est fermé dans $\mathcal{F}_V(X, Y)$.

DEMONSTRATION

Cette proposition se démontre exactement comme la proposition 11 : Avec les mêmes notations g_ε est borélienne (resp. borélienne de classe α) dès que les f_{ε,V_k} sont boréliennes (resp. boréliennes de classe α) et les V_k fermés. Comme g_ε approche f uniformément sur K, on en déduit que la restriction de f à K est borélienne (resp. borélienne de classe α). Il en résulte, puisque X est réunion dénombrable de compacts donc de fermés, que g est borélienne (resp. borélienne de classe α).

Les deux propositions suivantes sont les expressions en termes de V-convergence de propriétés de fonctions continues.

Proposition 14 *Soit $H \subset \mathcal{F}(X,Y)$, X compact, Y métrisable, H étant formé d'applications continues et tel que toute suite de points de H admette une valeur d'adhérence pour la V-convergence. Alors $\overline{H}^V$ est compact.*

DEMONSTRATION Cf. Bourbaki [2] Chap. IV,§2, ex. 15.

Théorème de Stone-Weierstrass. *Soit X un espace compact et $H \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ tel que :*

$$(u \in H \ \textit{et} \ v \in H) \Rightarrow (\sup(u,v) \in H \ \textit{et} \ \inf(u,v) \in H).$$

Alors $\overline{H}^u = \overline{H}^V$ où $\overline{H}^u$ désignant la fermeture de H pour la convergence uniforme.

Références

[1] Bourbaki N. *Eléments de Mathématique,Topologie énérale,* Hermann 1967.

[2] Bourbaki N. *Eléments de Mathématique, Espaces Vectoriels Topologiques,* Hermann 1967.

Nicolas BOULEAU
51 rue Gérard
75013 Paris